確率 42　　ⅢC

三つのさいころ A, B, C を同時に投げ, A の目が 1 のときには得点 1 を, B の目が 1 のときには得点 2 を, C の目が 1 のときには得点 4 を得るというゲームを行う。例えば A の目が 1, B の目が 3, C の目が 1 の場合の得点は $1+4=5$ である。

(1) 一回のゲームで得点が正になる確率を求めよ。

(2) 一回のゲームでの得点の期待値を求めよ。

(3) 得点が正の場合だけ続けて次のゲームを行うというルールで, 最長 $n$ 回のゲームを行うときの総得点の期待値を $E(n)$ とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} E(n)$ を求めよ。

〔青山学院大〕

(1) 3つとも1が出ない確率 $=\left(\frac{5}{6}\right)^3$

よって $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$

$\underline{\frac{91}{216}}$ //

(2) 1得点になる確率 $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

2得点になる確率 $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$

4得点になる確率 $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$

3得点になる確率 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$

6得点になる確率 $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

7得点になる確率 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

5得点になる確率 $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$

よって $\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot(1\times25+2\times25+4\times25+3\times5+6\times5+7\times1+5\times5)=\frac{7}{6}$

(ちなみに得点0は125通り)

$\underline{\frac{7}{6}}$ //

(3) 1回目 $\frac{7}{6}$　2回目 $\frac{7}{6}+\frac{7}{6}\times\frac{91}{216}$

3回目 $\frac{7}{6}+\frac{7}{6}\times\frac{91}{216}+\frac{7}{6}\times\left(\frac{91}{216}\right)^2$

以下

$E(n)=\frac{7}{6}+\frac{7}{6}\times\frac{91}{216}+\frac{7}{6}\times\left(\frac{91}{216}\right)^2+\cdots+\frac{7}{6}\times\left(\frac{91}{216}\right)^{n-1}$



$=\frac{7}{6}\left\{1+\frac{91}{216}+\left(\frac{91}{216}\right)^2+\cdots+\left(\frac{91}{216}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{7}{6}\times\left\{\frac{1-\left(\frac{91}{216}\right)^n}{1-\frac{91}{216}}\right\}=\frac{252}{125}\left\{1-\left(\frac{91}{216}\right)^n\right\}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}E(n)=\frac{252}{125}$