

袋の中に $n-3$ 個 ($n \geq 8$) の赤玉と 3 個の白玉が入っている。この袋の中から 7 個の玉を同時に取り出すとすると、赤玉が 5 個となる確率 P_n を n を用いて表すと、 $P_n = \square$ である。また、 P_n を最大にする n を求めると $n = \square$ である。 [東京慈恵医科大]

ok

取り出し方

$$n C_7 \text{ (通り)}$$

$n-3$ 個の赤玉から 5 個、3 個の白玉から 2 個
選り出すのは P_n は

$$P_n = \frac{{n-3} C_5 \cdot 3 C_2}{{n} C_7}$$

$$= \frac{\frac{(n-3)!}{(n-8)! 5!} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}}{\frac{n!}{(n-7)! 7!}} = \frac{3(n-3)!}{42(n-7)!} = \frac{126(n-7)}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\therefore P_n = \frac{126(n-7)}{n(n-1)(n-2)}$$

よって

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{126(n-6)}{(n+1)n(n-1)} = \frac{(n-6)(n-2)}{(n-7)(n+1)}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Leftrightarrow (n-6)(n-2) > (n-7)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 > n^2 - 6n - 7$$

$$\Leftrightarrow -2n > -19$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{19}{2} = 9.5$$

$$n=9 \text{ とき } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{21}{20} > 1$$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

$$n=10 \text{ とき } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{32}{33} < 1$$

$$\therefore P < P_9 < P_{10} > P_{11} > P_{12}$$

$$\therefore n=10$$