ごうかく!

ごうかく!

確率16

1 個のサイコロを $n$ 回投げるとき，1 の目がちょうど $k$ 回出る確率を $p_k$ とする。

(1) $p_k = {}_n\mathrm{C}_k \left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^k \left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)^{n-k}$ である。

(2) $n = 20$ のとき，$p_k$ が最大となる $k$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，$n = 34$ のとき $p_k$ が最大となる $k$ の値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $m$ を自然数とするとき

$$p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{m-1} < p_m \geqq p_{m+1}$$

となるための必要十分条件は

$$\boxed{\text{キ}}\, m \leqq n \leqq \boxed{\text{ク}}\, m + \boxed{\text{ケ}}$$

であることである。

〔東京理大〕

(1) $P_k = {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ (アイウエ)　∵ ${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

(2) $P_k = \dfrac{n!\,1^k \cdot 5^{n-k}}{k!(n-k)!\,6^k \cdot 6^{n-k}} = \dfrac{n!\,5^{n-k}}{k!(n-k)!\,6^n}$

$P_{k+1} = \dfrac{n!\,5^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!\,6^n}$

$\dfrac{P_k}{P_{k+1}}$ が1より大きくなる point を探す　$\dfrac{P_k}{P_{k+1}} = \dfrac{5(k+1)}{n-k}$

$\dfrac{5(k+1)}{n-k} = 1$ として　$5(k+1) = n-k$　$6k = n-5$　$k = \dfrac{n-5}{6}$ …①

①で $n=20$ のとき　$k \fallingdotseq 2.5$　より $k=3$ で最大　$p_0 < p_1 < p_2 < p_3 > p_4$ …

①で $n=34$ のとき　$k = 4.\cdots$　より $k=5$ で最大　$p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 > p_6 >$ …

∴ $n=20$ のと $k=3$ のとき最大 (オ)

$n=34$ のとき $k=5$ のとき最大 (カ)

(3) ①より

$m-1 < \dfrac{n-5}{6} \leqq m$

$6m-6 < n-5 \leqq 6m$

$6m-1 < n \leqq 6m+5$

$6m \leqq n \leqq 6m+5$

1へらして 等号をつけるようにする

∴ (キクケ) $6m \leqq n \leqq 6m+5$

ごうかく!

ごうかく!