B

表の出る確率が p, 裏の出る確率が $1-p$ であるような硬貨を 10 枚同時に投げたとき, 表の出る枚数が n である確率を p_n とする ($n=0, 1, 2, \cdots, 10$)。

(1) p_n を求めよ。

(2) $p_0, p_1, \cdots, p_{10}$ のうち p_6 が最大になるために, 確率 p が満たさなければならない範囲を求めよ。ただし $0<p<1$ とする。

〔姫路工大〕

(1)

$$p_n = {}_{10}C_n\, p^n (1-p)^{10-n} \quad (0 \leqq n \leqq 10)$$

(2)

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{{}_{10}C_{n+1}\, p^{n+1} (1-p)^{9-n}}{{}_{10}C_n\, p^n (1-p)^{10-n}}$$

$$= \frac{10-n}{n+1} \cdot \frac{p}{(1-p)}$$

$p_n < p_{n+1}$ より $\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ となるのは

$\frac{(10-n)p}{(n+1)(1-p)} > 1$ $\quad (10-n)p > (n+1)(1-p)$

$10p - \cancel{np} > n - \cancel{np} + 1 - p$

$n < 11p - 1$

p_6 が最大になるためには

i) $\cdots p_4 < p_5 < p_6 > p_7 > p_8 \cdots$

ii) $\cdots p_4 < p_5 = p_6 > p_7 \cdots$

iii) $\cdots p_4 < p_5 < p_6 = p_7 > p_8 \cdots$

このパターン

i) のとき $5 < 11p - 1 < 6$ より $\frac{6}{11} < p < \frac{7}{11}$

ii) のとき $5 = 11p - 1$ より $p = \frac{6}{11}$

iii) のとき $6 = 11p - 1$ より $p = \frac{7}{11}$

これより $\frac{6}{11} \leqq p \leqq \frac{7}{11}$