12

10本のクジの中に2本の当たりクジがある。当たりくじを2回引くまで繰り返しクジを引くものとする。ただし，一度引いたクジは毎回元に戻す。n 回で終わる確率を p_n とする。

1. p_n を求めよ。
2. p_n が最大となる n を求めよ。

(1)　あたりの確率 $\frac{1}{5}$　はずれの確率 $\frac{4}{5}$

n回の試行のうち　$n-1$回目までにあたりを1回，

n回目にあたりを引く確率は

$$p_n = {}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= (n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{(n-1)\,4^{n-2}}{5^n}$$

$$p_n = \frac{(n-1)4^{n-2}}{5^n}$$

(2)
$$p_{n+1} = \frac{n\cdot 4^{n-1}}{5^{n+1}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{n\cdot 4^{n-1}}{5^{n+1}}}{\frac{(n-1)4^{n-2}}{5^n}} = \frac{4n}{5(n-1)} \quad \cdots①$$

$p_{n+1} > p_n$ とすると　$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ であるから　①より

$\frac{4n}{5(n-1)} > 1$　　$4n > 5(n-1)$

$-n > -5$

$n < 5$ …[illegible]

$1 \leqq n \leqq 4$

$p_n = p_{n+1}$ より　$5-n=0$，$n=5$

$p_n > p_{n+1}$ より　$5-n<0$，$n>5$ より　$n \geqq 6$

$p_1 < p_2 < \cdots < p_5 = p_6 > p_7 > p_8 \cdots$　　よって p_n が最大となる n は $5, 6$