袋の中に白球 10 個, 黒球 60 個が入っている。この袋の中から 1 球ずつ取り出した球をもとに戻しながら 40 回繰り返すとき, 白球が何回取り出される確率が最も大きいか。

白球 $\frac{10}{70} = \frac{1}{7}$

黒球 $\frac{60}{70} = \frac{6}{7}$

$$P_n = {}_{40}C_n \left(\frac{1}{7}\right)^n \left(\frac{6}{7}\right)^{40-n}$$

$$P_{n+1} = {}_{40}C_{n+1} \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} \left(\frac{6}{7}\right)^{39-n}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{{}_{40}C_{n+1}\left(\frac{1}{7}\right)}{{}_{40}C_n\left(\frac{6}{7}\right)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{40-n}{n+1} \quad \cdots ①$$

このとき $P_{n+1} > P_n$ となるとすると

$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ がいえることから ①より

$$\frac{40-n}{6(n+1)} > 1$$

$$40 - n > 6(n+1)$$

$$40 - n > 6n + 6$$

$$7n < 34$$

$$n < 4.8\cdots$$

これより

$$0 \leqq n \leqq 4$$

つまり

$P_n > P_{n+1}$ となるのは $n \geqq 5$ のとき

実際

$P_0 < P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 > P_6 > P_7 \cdots$

P_5 が最大であるから

白球が5回取り出されるのが確率として最も大きい