解と係数9

kを実数とし，xの2次方程式$x^2+kx+\dfrac{3}{4}=0$の解をα,βとする。$\alpha^2-\beta^2=2$のとき，定数kとα,βを求めよ。〔日本女子大〕

解と係数の関係より　$\alpha\beta$ とすると

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-k \\ \alpha\beta=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=k^2-3$$

$$\alpha-\beta=\pm\sqrt{k^2-3}$$

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ より

$$\alpha^2-\beta^2=-k\sqrt{k^2-3}$$
$$=-\sqrt{k^4-3k^2}$$ であるから

$-\sqrt{k^4-3k^2}=2$ として両辺を2乗すると

$$k^4-3k^2-4=0$$
$$(k^2-4)(k^2+1)=0$$
$$(k+2)(k-2)(k^2+1)=0$$

よって $k=\pm2$

$k=2$のとき

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2 \\ \alpha-\beta=\pm1 \end{cases}$$

$(\alpha,\beta)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ …2つは同じこと

$\alpha=-2$のとき

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha-\beta=\pm1 \end{cases}$$

$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ …2つは同じこと

$\therefore\ (k,\alpha,\beta)=\left(\pm2,\mp\frac{1}{2},\mp\frac{3}{2}\right)$