H29.1.3 訂正

a, b を実数とする。方程式 $x^2 + ax + b = |x|$ が相異なる 4 個の実数解をもつような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ。〔信州大〕

与式を

a) $x \geqq 0$ のとき

$x^2 + ax + b = x$

$x^2 + (a-1)x + b = 0$ …①

b) $x < 0$ のとき

$x^2 + ax + b = -x$

$x^2 + (a+1)x + b = 0$ …②

a) ①のとき $x \geqq 0$ に異なる2つの実数解をもつためには

$$\left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2 + b - \frac{(a-1)^2}{4} = 0 \text{ より}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{a-1}{2} > 0 \\ b - \dfrac{(a-1)^2}{4} < 0 \\ b \geqq 0 \end{cases} \text{ となり } \begin{cases} a < 1 \\ b < \dfrac{1}{4}(a-1)^2 \\ b \geqq 0 \end{cases} \cdots \text{(i)}$$

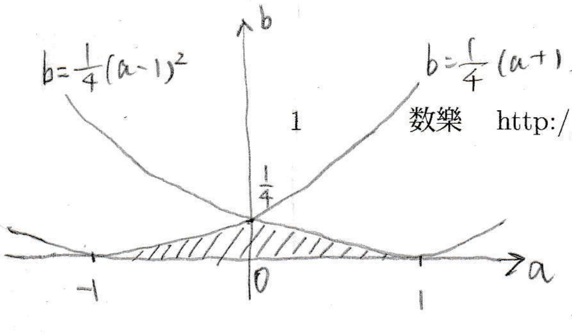
b) ②のとき $x < 0$ に異なる2つの実数解をもつためには

$$\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + b - \frac{(a+1)^2}{4} = 0 \text{ より}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{a+1}{2} < 0 \\ b - \dfrac{(a+1)^2}{4} < 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ となり } \begin{cases} a > -1 \\ b < \dfrac{1}{4}(a+1)^2 \\ b > 0 \end{cases} \cdots \text{(ii)}$$

(i)(ii) より 与式が異なる4つの実数解をもつための a, b の条件は

$$\begin{cases} -1 < a < 1 \\ b < \dfrac{1}{4}(a-1)^2 \\ b < \dfrac{1}{4}(a+1)^2 \\ b > 0 \end{cases}$$



(a, b) の集合は斜線部で境界線は含まない。