2021円 不等式 6

a を定数とし，2 次関数 $y = -x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3$ のグラフを C とする。

(1) グラフ C の頂点の座標は $\left(\dfrac{2a - \boxed{ア}}{\boxed{イ}}, \dfrac{-4a^2 + \boxed{ウエ}}{4} \right)$ である。

(2) グラフ C と x 軸が異なる 2 点で交わるための a の範囲は $-\dfrac{\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}} < a < \dfrac{\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$ $\cdots$ ①

(3) a は①を満たす整数とする。このとき，グラフ C と x 軸との二つの交点の x 座標がともに整数となるのは，$a = \boxed{ク}$ または $a = \boxed{ケコ}$ の場合であり，その場合に限る。$a = \boxed{ケコ}$ のとき，交点の x 座標は $\boxed{サシ}$ と $\boxed{スセ}$ である。ただし，$\boxed{サシ}$ と $\boxed{スセ}$ は解答の順序を問わない。

〔センター試験〕

(1) $y = -\left(x - \dfrac{2a-5}{2}\right)^2 + \dfrac{(2a-5)^2}{4} - 2a^2 + 5a + 3$

$= -\left(x - \dfrac{2a-5}{2}\right)^2 + \dfrac{-4a^2+37}{4}$　頂点は $\left(\dfrac{2a-5}{2}, \dfrac{-4a^2+37}{4}\right)$ (アイウエ)

(2) 判別式 $D > 0$

$(2a-5)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2a^2+5a+3) > 0$

$4a^2 - 20a + 25 - 8a^2 + 20a + 12 > 0$ → $-4a^2 + 37 > 0$

$4a^2 < 37$ → $-\dfrac{\sqrt{37}}{2} < a < \dfrac{\sqrt{37}}{2}$ (オカキ)

(3) (1)より $D = -4a^2 + 37$ が平方数になれば整数解をもつ

(2)より a のとる値は $0, \pm1, \pm2, \pm3$ でありこのとき $-4a^2+37$ が平方数になるのは $a = \pm3$ のときである　よって $a = 3$ または $a = -3$ (クケコ)

(4) $a = -3$ のとき

$y = -x^2 - 11x - 30$

$= -(x+6)(x+5)$　∴ $-6, -5$ (サシスセ)