1A 2次関数の方程式 12

実数 α,β について，x,y は2つの方程式

$$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1,\ 2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$$

をみたすものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を x,y で表せ。

(2) t の2次方程式 $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ が実数解をもつ条件を x,y で表せ。

(3) α,β が条件 $-1\leqq\alpha\leqq1,\ -1\leqq\beta\leqq1$ をみたすとき，点 (x,y) の存在範囲を座標平面に図示せよ。

〔金沢大〕

(1) 与式より $2x+2y=2\alpha\beta+2\alpha+2\beta-2$

$-)\ 2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$

$-y=-\alpha\beta+1$ ∴ $\alpha\beta=1+y$ これより

$x+y=1+y+\alpha+\beta-1$ ∴ $\alpha+\beta=x$

答 $\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha\beta=1+y\end{cases}$

(2) (1)より

$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=t^2-xt+(1+y)$ となり

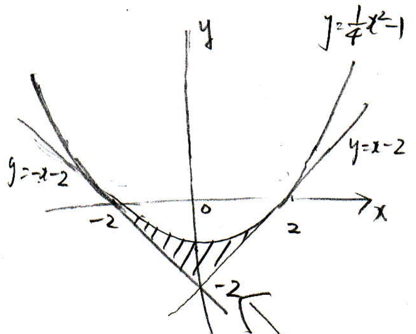
$t^2-xt+(1+y)=0$ とするとき 判別式 $D\geqq0$ であればよい

∴ $x^2-4(1+y)\geqq0$　$x^2-4y-4\geqq0$

(3) (2)より

$x^2-4y-4\geqq0$ であるから

$-4y\geqq-x^2+4$ として $y\leqq\frac{1}{4}x^2-1$ …①



α,β はともに $t^2-xt+(1+y)=0$ の解であるから

$f(t)=t^2-xt+(1+y)$ とすると α,β は $-1\leqq t\leqq1$ の範囲に解をもつので

$f(-1)\geqq0$ $f(1)\geqq0$ が成り立つ

∴ $x+y+2\geqq0$　$y\geqq-x-2$ …②

$-x+y+2\geqq0$　$y\geqq x-2$ …③

また $f(t)=\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}+1+y$ より $-1\leqq\frac{x}{2}\leqq1$　$-2\leqq x\leqq2$ …④

よって (x,y) の範囲は右上の図の斜線部．境界線は含む