2次関数と不等式 10



実数 $a$ に対し，2 次関数

$$f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$$

を考える。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つような $a$ の範囲を求めよ。

(2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り，$1 \leqq \alpha < \beta \leqq 3$ となるような $a$ の範囲を求めよ。

〔千葉大〕

(1) 判別式 $D>0$ より

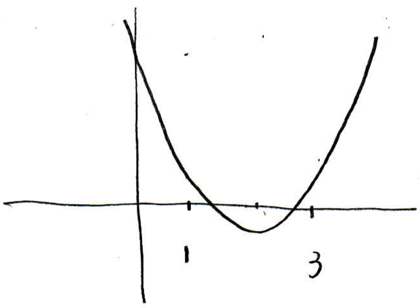
$a^2-4(-a^2+5a)>0$

$a^2+4a^2-20a>0$

$5a^2-20a>0$

$5a(a-4)>0$ $\therefore$ $a>4,\ a<0$

(2)



$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{5}{4}a^2+5a$

軸 $1<\frac{a}{2}<3$ より $2<a<6$ …(a)

$f(1)\geqq 0$ より

$1-a-a^2+5a\geqq 0$

$a^2-4a-1\leqq 0$ $2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5}$ …(b)

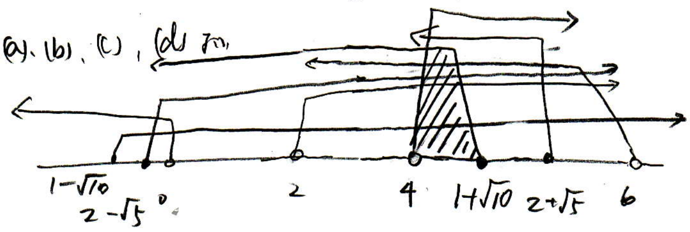
$f(3)\geqq 0$

$9-3a-a^2+5a\geqq 0$

$a^2-2a-9\leqq 0$ $1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10}$ …(c)

(1) より $a>4$ $a<0$ …(d)

(a), (b), (c), (d) より



$4<a\leqq 1+\sqrt{10}$