2次関数 $y = x^2 + (2k-10)x - 4k + 16\ (k \geqq 0)$ のグラフについて, 次の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) $k = 0$ ならば頂点の座標は $\left(\boxed{}, -\boxed{}\right)$ である。

(2) x 軸と 2 つの共有点をもち, それらの間の距離が 8 ならば $k = \boxed{}$。

(3) k が変化するとき, 頂点の軌跡は放物線 $y = -\left(x - \boxed{}\right)^2$, $x \leqq \boxed{}$ となる。

〔東北工業大〕

(1)

$k=0$ のとき　$y = x^2 - 10x + 16$

$= (x-5)^2 - 9$　　$(5, -9)$

(2)

x軸との交点を α, β　$\beta > \alpha$ とすると

$\{x + (k-5)\}^2 - (k-5)^2 - 4k + 16 = 0$

$\{x + (k-5)\}^2 = k^2 - 6k + 9 = (k-3)^2$

因数分解できたみたら とおお…

$x + (k-5) = \pm (k-3)$

$x = 2, -2k+8$

$2 \geqq -2k+8$ のとき

$2 - (-2k+8) = 8$

$2k - 6 = 8$　$k = 7$

$-2k+8 \geqq 2$ のとき

$(-2k+8) - 2 = 8$

$k = -1$（不適）

$\therefore k = 7$

(3)

(2)より 頂点は $(-k+5, -k^2+6k-9)$

$x = -k+5$, $y = -k^2 + 6k - 9$

$k = 5 - x$ を y の式に代入すると

$y = -(5-x)^2 + 6(5-x) - 9$

$= -25 + 10x - x^2 + 30 - 6x - 9$

$= -x^2 + 4x - 4$

$= -(x-2)^2$

$k = 5 - x$　$k \geqq 0$ より

$x \leqq 5$

以上より

$y = -(x-2)^2$　$x \leqq 5$