

因数分解

因数分解は展開の逆の作業のことをいいます。

因数分解って、厳密には中3で習うんですが、中2で実はすこしかじっているんです。

偶数 + 偶数は偶数っていう文字式の説明ってやったでしょ？覚えていますか？

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

この作業を因数分解って言うんですね。左辺の $2m + 2n$ の各項に共通する 2 という因数をとりだして、右辺の $2(m + n)$ に変形していますね。このように、共通する文字や数字を最大限とりだすことを因数分解といいます。この共通する因数のことをそのまま共通因数といいます。

因数分解では、この共通因数を取り出すことが基本となります。

$$5xy^2 + 10x^2y = 5xy(y + 2x)$$

ここで、 $5xy$ は $5xy^2$ と $10x^2y$ に共通する因数（約数）です。因数とは約数のことであることは、素因数分解のところで勉強しました。こうやって、式も因数で分解していきます。

現行教科書では公式から因数分解をたどっていますが、今回は因数分解の本質？的などから入っていきます。それは、展開すると

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

なるのであれば、

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

と因数分解できるということです。ではどうやって考えるか、それは数字に隠されています。6 という数字は最後ある 2 つの数を掛け算して得られた数です。また、5 はある 2 つの数を足して得られた数ということは公式から分かることです。ここで、掛け算して 6 になる 2 数を考えた方が有効か、足して 5 になる 2 数を考えた方が有効かを考えた場合、整数の範囲に限定しても、足して 5 になる 2 数の組み合わせは無限にあることに気付くでしょう。そして掛けて 6 になる 2 数の組み合わせ方が有限個です。ですから、掛けて 6 になる 2 数を考えていきます。掛けて 6 になる数も考え方によっては無限にありますが、中学校の因数分解は基本的には整数の範囲で行うことが多いので、それはイレギュラーな例としてここでは扱わないことにします。では掛けて 6 になる組み合わせを考えると、以下の表ができます。

掛けて 6 になる組み合わせ	2 数の和
1 と 6	7
2 と 3	5
-1 と -6	-7
-2 と -3	-5

この表から、掛けて 6 足して 5 になる 2 数の組み合わせは 2 と 3 になります。したがって、 $x^2 + 5x + 6$ は $(x + 3)(x + 2)$ と因数分解できるのです。

残りの公式もこれが基本で因数分解できます。例えば, $x^2 - 8x + 16$ の因数分解も, いまやったやり方で解けます。

掛けて 16 になる組み合わせ	2 数の和
1 と 16	17
2 と 8	10
4 と 4	8
-1 と -16	-17
-2 と -8	-10
-4 と -4	-8

この表から, 足して -8 になる組み合わせは -4 と -4 になります。したがって, $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4)$ となり, 同じ式は累乗を使って書くので, $(x - 4)^2$ と因数分解できます。

次に, $x^2 - 16$ の因数分解も同様に考えることができます。今度は掛けて -16, 足して 0 になる組み合わせを考えればいいので,

掛けて -16 になる組み合わせ	2 数の和
1 と -16	-15
2 と -8	-6
4 と -4	0
-1 と 16	15
-2 と 8	6

この表から, 掛けて -16, 足して 0 の組み合わせは 4 と -4 である。したがって, $x^2 - 16$ は $(x + 4)(x - 4)$ と因数分解できます。

この 4 パターンが基本になります。

あとはこれらを組み合わせたりしているだけです。少し応用問題をいくつかやって終わりたいと思います。

(1) $ax^2 + 8ax + 12a$ を因数分解しなさい。

(2) $(x + 2)^2 + (x + 2) - 12$ を因数分解しなさい。

(3) $(a + b)x - (a + b)y$ を因数分解しなさい。

(1) 共通因数 a でくくって、さらに因数分解

$$a(x^2 + 8x + 12) = a(x + 2)(x + 6) \quad \dots \dots \text{(答)}$$

(2) $x + 2 = A$ とおくと

$A^2 + A - 12$, これを因数分解すると,

$$(A + 4)(A - 3)$$

$A = x + 2$ として計算すると,

$$\{(x + 2) + 4\}\{(x + 2) - 3\} = (x + 6)(x - 1) \quad \dots \dots \text{(答)}$$

(3) $a + b = M$ とおくと

$Mx - My$, 共通因数 M でくくると,

$M(x - y)$, $M = a + b$ にもどすと,

$$(a + b)(x - y) \quad \dots \dots \text{(答)}$$