漸化式6

数列 $\{a_n\}$ は, $a_1=0, a_2=1$, $3a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$ で与えられるとき,

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

〔練習問題〕

(1) 特性方程式

$3x^2=x+2$

$3x^2-x-2=0$

$(x-1)(3x+2)=0$ より　$a_{n+1}-a_n=-\frac{2}{3}(a_n-a_{n-1})$ より

数列 a_n-a_{n-1} は初項 $a_2-a_1=1$ 公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列

$a_n-a_{n-1}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore$ $\underline{a_n=\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

(2)

$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{5}$