数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_0 = 1,\ (n+1)a_n - na_{n-1} = n^2 - n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められるとき，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}})$ を求めよ。 〔芝浦工大〕

$b_n = (n+1)a_n$ とおくと

$b_n - b_{n-1} = n^2 - n + 1$

$b_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 1)$

$= 1 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + n$

$= \frac{6 + 2n^3 + \cancel{3n^2} + n - \cancel{3n^2} - 3n + 6n}{6}$

$= \frac{2n^3 + 4n + 6}{6} = \frac{n^3 + 2n + 3}{3}$

となる $b_n = (n+1)a_n$ より

$(n+1)a_n = \frac{n^3 + 2n + 3}{3}$

$\therefore a_n = \frac{n^2 - n + 3}{3}$ …①

$$\begin{array}{r} n^2 - n + 3 \\ n+1 \overline{) n^3 + 2n + 3} \\ n^3 + n^2 \\ \hline -n^2 + 2n + 3 \\ -n^2 - n \\ \hline 3n + 3 \end{array}$$

$n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 3$

$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2 - (n-1) + 3}{3}$ より

$a_{n-1} = \frac{n^2 - 3n + 5}{3}$ …②

①、② より

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}}$ …(a)

$a_n - a_{n-1} = \frac{2n-2}{3} = \frac{2(n-1)}{3}$ …①

$\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = \sqrt{\frac{n^2 - n + 3}{3}} + \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 5}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\sqrt{n^2 - n + 3} + \sqrt{n^2 - 3n + 5}\}$ …②

①、② より (a) は

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{n-1}{\sqrt{n^2 - n + 3} + \sqrt{n^2 - 3n + 5}} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$