

無限級数

関数 $f(x)$ が $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} + \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1 + \sin^2 \frac{x}{4}} + \dots + \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{(1 + \sin^2 \frac{x}{4})^n} + \dots$ であるとき、

$y = f(x)$ のグラフをかけ。

[神戸商船大]

① $\sin \frac{x}{4} = 0$ のとき、つまり $x = 4n\pi$ (n は整数)

$f(x) = 0$ に収束

② $x = 2\pi a$ のとき

$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ となり、各項 $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$

よって $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

③ $x \neq 4n\pi$ $x \neq 2n\pi$ のとき $0 < \sin^2 \frac{x}{4} < 1$ より

$$f(x) = \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1 - \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{x}{4}}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{4} (1 + \sin^2 \frac{x}{4})}{\cancel{x + \sin^2 \frac{x}{4}} - 1} = 1 + \sin^2 \frac{x}{4}$$

①, ②, ③ より、グラフは下図の通り

