

2043

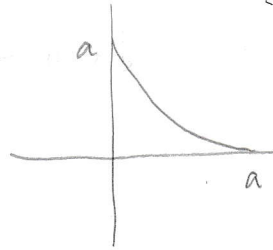
次の式で表される曲線の長さを求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

[標準問題]

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$



求める曲線は $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ と求めて4倍する

求める長さ L とすると

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2} dt$$

$$= 12a \left[-\frac{\cos 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 12a \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \underline{6a}$$

$$\underline{6a}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ (J)}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$