

次の3つの条件を満たす3次関数 $f(x)$ を求めよ。

- (i) 点 $(0, 1)$ は $y = f(x)$ の変曲点である。
- (ii) 点 $(0, 1)$ における $y = f(x)$ の接線は $3x + y = 0$ に平行である。
- (iii) $f(x)$ のグラフは x 軸に接する。

[信州大]

求める関数を $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

(i) より $f''(0) = 0$ より $2b = 0 \rightarrow b = 0$

(ii) より $f'(0) = -3$ より $c = -3$

$f(0) = 1$ より $d = 1$

よって整理すると

$$f(x) = ax^3 - 3x + 1$$

$f(x)$ が x 軸と接する点を $(m, 0)$ とすると

$$f(m) = am^3 - 3m + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

又 $(m, 0)$ における接線の傾きは 0 であるから

$$f'(m) = 3am^2 - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ より $am^2 = 1 \quad \dots \textcircled{3}$, $\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$m - 3m + 1 = 0$$

$$-2m = -1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$\textcircled{3}$ に代入して

$$\frac{3}{4}a - 3 = 0$$

$$a = 4$$

以上より

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 1$$