次の等式が成り立つような a, b の値を求めなさい。

$$\lim_{x \to \cancel{\infty}\ \pi} \frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

$x \to \pi$ のとき 分母 0 なので そのとき 分子も 0 となる。よって $\sqrt{a+\cos\pi}-b=0$

$\sqrt{a-1}-b=0$ より $b=\sqrt{a-1}$ を与式に代入して

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2}$$

$x-\pi=t$ とおくと $x=t+\pi$ となり $t \to 0$ となることから

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{a+\cos(t+\pi)}-\sqrt{a-1}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{a-\cos t-a+1}{t^2\left(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)\left(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos t)\left(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{a-1}} = \frac{1}{4\sqrt{a-1}}$$

これより

$\dfrac{1}{4\sqrt{a-1}} = \dfrac{1}{4}$ より $a=2$

$b=\sqrt{a-1}$ より $b=1$

$a=2,\ b=1$