

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 E は 2 次の単位行列、 O は 2 次の零行列を表す。

- (1) $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つことを示せ。
- (2) $A^{12} - 19A^{10} + 30A^9 + A^2 - 4A + 3E$ を求めよ。
- (3) $A^4 + aA + bE = O$ が成り立つとき、定数 a, b の値を求めよ。

[静岡大]

$$\begin{aligned} \text{1)} \quad A^2 &= 5A - 6E & A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ & & &= \begin{pmatrix} 1-2 & -2-8 \\ 1+4 & -2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \dots \text{①} \end{aligned}$$

$$5A - 6E = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \dots \text{②}$$

①, ②より $A^2 = 5A - 6E$ より、 $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つ

$$\text{2)} \quad \text{5式} = A^9(A^3 - 19A + 30E) + A^2 - 4A + 3E \dots \text{①}$$

$$A^2 = 5A - 6E \dots \text{②}$$

$$A^3 = 5A^2 - 6A$$

$$= 5(5A - 6E) - 6A$$

$$= 25A - 30E - 6A$$

$$= 19A - 30E \dots \text{③}$$

②, ③を①に代入

$$A^9(A^3 - 19A + 30E) + A^2 - 4A + 3E$$

$$= A^9(19A - 30E - 19A + 30E) + 5A - 6E - 4A + 3E$$

$$= A - 3E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\text{3)} \quad A^4 + aA + bE$$

$$= A(19A - 30E) + aA + bE$$

$$= 19A^2 - 30A + aA + bE$$

$$= 19(5A - 6E) - 30A + aA + bE$$

$$= 95A - 114E - 30A + aA + bE$$

$$= 65A + aA - 114E + bE$$

$$= \begin{pmatrix} 65 & -130 \\ 65 & 260 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -2a \\ a & 4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 114 & 0 \\ 0 & 114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{cases} 65 + a - 114 + b = 0 \\ -130 - 2a = 0 \\ 65 + a = 0 \\ 260 + 4a - 114 + b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{a = -65}} \quad \underline{\underline{b = 114}}$$