複素数2

$\omega = \sqrt{3} + i$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) ω を極形式で表せ。

(2) ω^6 の値を求めよ。

(3) O を原点とする複素平面上で 3 点 O, ω, $\dfrac{1}{\omega}$ が作る三角形の面積 S を求めよ。

(4) 複素数 z が $|iz + 1 - \sqrt{3}i| \leqq 2$ を満たすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(i) 複素平面上で z が描く図形を図示せよ。

(ii) $l = |z+1|$ とおくとき, l の最大値と最小値を求めよ。

〔高知大〕

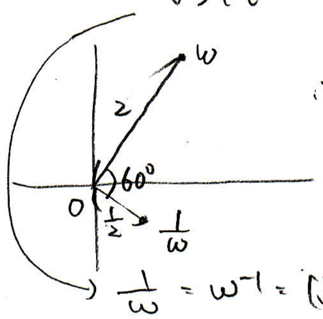
(1) $|w| = 2$.

$\therefore w = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ $\quad \underline{w = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

(2) $w^6 = 64(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -64$

(3) $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$



$\therefore S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} \sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

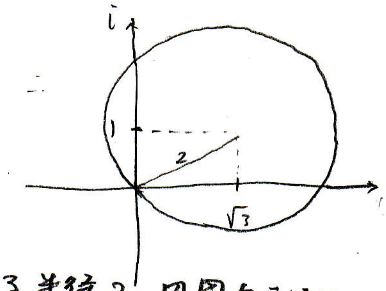
$\dfrac{1}{w} = w^{-1} = (\sqrt{3}+i)^{-1} = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{-1} = \dfrac{1}{2}\{\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)\}$

(4)

(i) $|iz + 1 - \sqrt{3}i| = \left|i\left(z + \dfrac{1-\sqrt{3}i}{i}\right)\right| = |i|\left|z + \dfrac{i+\sqrt{3}}{-1}\right|$

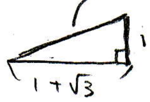
$= |i||z - (\sqrt{3}+i)|$

$= |z - w| \leqq 2$

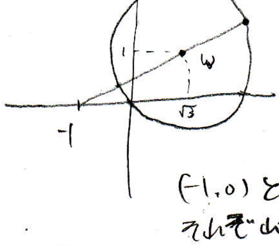


複素数 z は w を中心とする半径2の円周上および内部の点である。

(ii) $l = |z - (-1)|$



$\sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$



$\therefore$ 最大値は $\sqrt{5+2\sqrt{3}} + 2$

最小値は $\sqrt{5+2\sqrt{3}} - 2$

(-1, 0) と w を結ぶ直線との交点がそれぞれ最大値、最小値の点になる