3[積分97]

(1) 2曲線 $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{e}{2}\log x$ が1点 (e^2, e) のみを共有することを証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2) (1) の2曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

〔北海道大〕

(1) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{e}{2}\log x$ とおくと $(\because x>0)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{e}{2x}$$

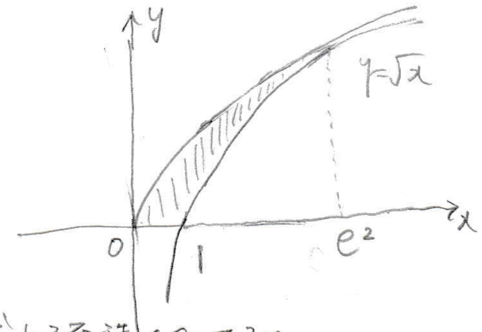
$$=\frac{\sqrt{x}-e}{2x}$$

このとき $f'(x)=0$ とすると $x=e^2$ で $f(x)$ は極小値をとる。また、

$f(e^2)=0$ となるので $f(x)$ は $f(x)\geqq 0$ であることがわかる。

x	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

($f(x)$ の増減表)



よって2曲線は1点 (e^2, e) だけを共有する

(2) 求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{e^2}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{e}{2}\log x\,dx$$

$x^{\frac{1}{2}}\ \frac{3}{2}$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2}-\frac{e}{2}\left[x\log x-x\right]_1^{e^2}$$

$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{e}{2}\{(2e^2-e^2)-(0-1)\}$$

$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{e^3}{2}-\frac{e}{2}$$

$$=\frac{1}{6}e^3-\frac{e}{2}$$

$\frac{4}{6}\ \frac{3}{6}$

$\therefore\ \underline{\dfrac{1}{6}e^3-\dfrac{e}{2}}$