2005

3C積分92

関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) x がすべての実数の範囲を動くとき, $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=0,\ x=1$ および x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔弘前大〕

(1) $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

$x^2+2x-1=0$ の2つの解をそれぞれ α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$(x+1)^2=2$ より $\alpha=-1-\sqrt{2}$, $\beta=-1+\sqrt{2}$ であるからこれをもとに

増減表をかくと

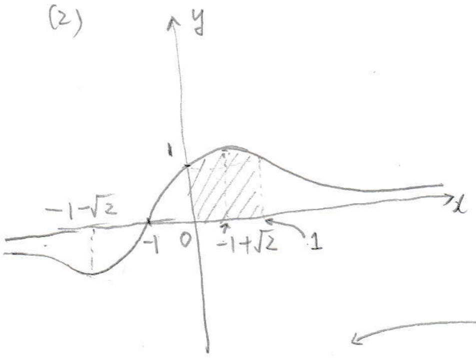
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f(\alpha)=\dfrac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}+1}{2}$

$f(\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

$\therefore$ 答 $\begin{cases} x=-1-\sqrt{2} \text{ のとき極小値 } \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \text{ のとき極大値 } \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(2)



求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\pi\int_0^1\left\{\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}dx$$

$$\pi\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx+\pi\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx \quad \cdots ①$$

$x=\tan\theta$ とおくと
$x: 0\to 1$
$\theta: 0\to\frac{\pi}{4}$

$\pi\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}dx=\frac{\pi^2}{4}$ より ① は

$$V=\frac{\pi^2}{4}+\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)'dx=\frac{\pi^2}{4}-\pi\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore V=\frac{\pi}{4}(\pi+2)$$