3C積分78

曲線 $y=x^2+ax$ と曲線 $y=xe^{-x}$ とが，ある共有点で共通の接線をもつように定数 a の値を求めよ。このとき，これらの曲線と直線 $x=-1$ とで囲まれた部分の面積を求めよ。 〔熊本大〕

$y'=2x+a$ $y'=e^{-x}-xe^{-x}$ 共有点のx座標をtとすると

$2t+a=e^{-t}(1-t)$ ∴ $a=e^{-t}(1-t)-2t$ …①

$y=t^2+at$ $y=te^{-t}$

$t^2+at=te^{-t}$ より

$t(t+a-e^{-t})=0$ ∴ $t=0$, $t=-a+e^{-t}$ …②

$t=0$とすると①は $a=1$

$t=-a+e^{-t}$とすると $e^{-t}=a+t$となりこれを①に代入すると，

$a=(a+t)(1-t)-2t$

$\cancel{a}=\cancel{a}-at+t-t^2-2t$

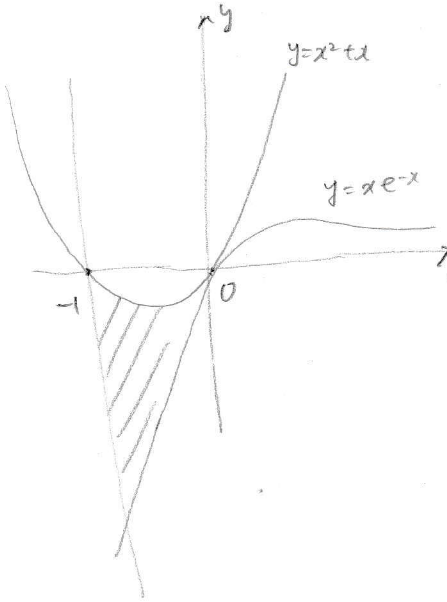
$t^2+t+at=0$ $t(t+1+a)=0$ ここで $t\neq0$ ∴ $t=-1-a$

このとき これを②に代入すると $-1-a=-a+e^{1+a}$ $e^{1+a}=-1$となり

合わない よって $a=1$

求める面積を斜線で図示すると $y=x^2+x$ $y=xe^{-x}$

左図のようになり求める面積をSとすると



$$S=\int_{-1}^{0}(x^2+x-xe^{-x})\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[xe^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-x}\,dx$$

$$=0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\{0-(-e)\}+\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\frac{1}{6}+\cancel{e}+1-\cancel{e}=\frac{5}{6}$$

$\underline{\dfrac{5}{6}}$