

3C 極値 18

a を正の定数とすると、 x の関数 $f(x) = \frac{-ax + a^2 + 1}{x^2 - 4}$ の極小値と、そのときの x の値を求めよ。 [浜松医大]

$$f'(x) = \frac{-a(x^2-4) - 2x(-ax+a^2+1)}{(x+2)^2(x-2)^2} \quad (\because x \neq -2, 2, a > 0)$$

$$= \frac{ax^2 - 2(a^2+1)x + 4a}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(ax-2)(x-2a)}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

$x = \frac{2}{a}, 2a$ で極値をとる

(i) $\frac{2}{a} > 2a \quad 2a^2 < 2 \quad a^2 < 1 \quad a > 0$ より $0 < a < 1$ のとき、極小値は $x = \frac{2}{a}$ である。

(ii) $\frac{2}{a} < 2a \quad a^2 > 1 \quad a > 1$ のとき、極小値は $x = 2a$ である。

x	...	$2a$...	2	...	$\frac{2}{a}$...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

$x = \frac{2}{a}$ のとき極小値は $-\frac{a^2}{4}$

$\frac{2}{a} < 2a \quad (a^2 > 1) \quad a > 1$ のとき、極小値は $x = 2a$ である。

x	...	$\frac{2}{a}$...	2	...	$2a$...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

$x = 2a$ のとき極小値は $-\frac{1}{4}$

よって

$0 < a < 1$ のとき極小値 $-\frac{a^2}{4}$
 $a > 1$ のとき極小値 $-\frac{1}{4}$