

3C 極値 18

$a$  を正の定数とすると、 $x$  の関数  $f(x) = \frac{-ax + a^2 + 1}{x^2 - 4}$  の極小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。 [浜松医大]

$$f'(x) = \frac{-a(x^2-4) - 2x(-ax+a^2+1)}{(x+2)^2(x-2)^2} \quad (\because x \neq -2, 2, a > 0)$$

$$= \frac{ax^2 - 2(a^2+1)x + 4a}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(ax-2)(x-2a)}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

$x = \frac{2}{a}, 2a$  で極値をとる

(i)  $\frac{2}{a} > 2a \quad 2a^2 < 2 \quad a < 1 \quad a > 0$  のとき  $a < 1$  のとき極小値は  $x = \frac{2}{a}$

(ii)  $\frac{2}{a} < 2a \quad a^2 > 1 \quad 1 < a < 1$  のとき  $a > 1$  のとき

$x$	...	$2a$	...	$2$	...	$\frac{2}{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

$x = \frac{2}{a}$  のとき極小値は  $-\frac{a^2}{4}$

$\frac{2}{a} < 2a \quad (1 < a^2 \text{ のとき}) \quad 1 < a \quad a < 1$

$x$	...	$\frac{2}{a}$	...	$2$	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

$x = 2a$  のとき極小値は  $-\frac{1}{4}$

よって

$0 < a < 1$  のとき極小値  $-\frac{a^2}{4}$   
 $a > 1$  のとき極小値  $-\frac{1}{4}$