3C不等 6

$x>0$ のとき, $\cos^2 x + 2\cos x > 3 - 2x^2$ (ただし, $x \fallingdotseq 0$) を証明せよ。

$f(x) = \cos^2 x + 2\cos x + 2x^2 - 3 \quad (x \fallingdotseq 0)$

$f'(x) = -2\sin x \cos x - 2\sin x + 4x$

$f'(x) = -\sin 2x - 2\sin x + 4x$

$f''(x) = -2\cos 2x - 2\cos x + 4$

$\cos 2x \leqq 1$, $\cos x \leqq 1$ であるから

$f''(x) \geqq 0$ となる.

このとき

$\lim_{x \to +0} f'(x) = 0$ より $f'(x) > 0$ となり、

$\lim_{x \to +0} f(x) = 0$ より

$\cos^2 x + 2\cos x + 2x^2 - 3 > 0$ が成り立つ