



# 3c 増減 13



次の問いに答えよ。

(1)  $x > 0$  のとき、不等式  $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$  を証明せよ。

(2)  $x > 0$  のとき、 $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$  の増減を調べよ。

(3)  $0 < a < b$  のとき、 $(1+a)^b$  と  $(1+b)^a$  との大小を調べよ。

(1)  $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$  とおく

[防衛大]

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \quad x > 0 \text{ のとき } f'(x) > 0 \text{ である}$$

$f(0) = 0$  である  $\therefore x > 0$  のとき  $f(x) > 0$  である  $\therefore \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$  である

(2)  $f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{x}{x+1} - \log(1+x) \right\}$  とおく (1)より

$\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$  である  $\therefore f'(x) < 0$  である

$\therefore f(x)$  は  $x > 0$  で減少する

(3)  $f(x)$  は  $x > 0$  で減少するの  $\therefore f(a) > f(b)$  である

$$\frac{\log(1+a)}{a} > \frac{\log(1+b)}{b}$$

$$b \log(1+a) > a \log(1+b) \quad \text{である}$$

$$\underline{(1+a)^b > (1+b)^a}$$

