ⅡB 積分55

放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線が，放物線 $y = 2x^2 - 4x + 1$ と異なる 2 点で交わる。このとき，接線と放物線 $y = 2x^2 - 4x + 1$ で囲まれた部分の面積を S として，次の問いに答えよ。

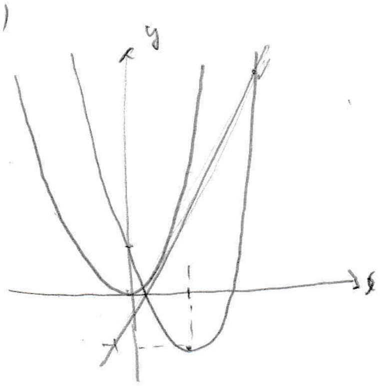
(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) S を a で表せ。

(3) S の最大値 M を求めよ。

〔玉川大〕

(1)



$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ とする

$g(x) = 2(x-1)^2 - 1$

$f'(x) = 2x$ より $P(a, a^2)$ における接線は

$y = 2a(x-a) + a^2 \rightarrow y = 2ax - a^2 \cdots ①$

① が $g(x)$ と異なる2点で交わるということは 二次方程式

$2x^2 - 4x + 1 = 2ax - a^2$ が 異なる2つの実数解をもつことと同等

$2x^2 - 2(2+a)x + 1 + a^2 = 0$ 判別式 $D/4 > 0$ とすると

$(2+a)^2 - 2(1+a^2) > 0$

$a^2 + 4a + 4 - 2 - 2a^2 > 0$

$a^2 - 4a - 2 < 0$

$(a-2)^2 < 6$

$\therefore\ 2 - \sqrt{6} < a < 2 + \sqrt{6}$

(2) $g(x)$ と $y = 2ax - a^2$ の交点を求めると

(1) より $2x^2 - 2(2+a)x + a^2 + 1 = 0$ より

$x = \dfrac{2 + a \pm \sqrt{(2+a)^2 - 2(a^2+1)}}{2} = \dfrac{2 + a \pm \sqrt{-a^2 + 4a + 2}}{2} \cdots ①$

① の 2つを α, β ($\beta > \alpha$) とすると 求める面積 S は

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{2ax - a^2 - (2x^2 - 4x + 1)\}\, dx$ ここで $\beta - \alpha = \sqrt{-a^2 + 4a + 2}$ より

$= 2 \cdot \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ より $S = \frac{1}{3}\left(\sqrt{-a^2 + 4a + 2}\right)^3$

(3) (2) より $S = \frac{1}{3}\left(\sqrt{-(a-2)^2 + 6}\right)^3$ となり $a = 2$ のとき 最大値 $S = \frac{1}{3}(\sqrt{6})^3 = 2\sqrt{6}$

$\therefore\ a = 2$ のとき最大値 $2\sqrt{6}$