次の条件 (イ),(ロ) を同時にみたす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(イ) 任意の一次関数 $px+q$ に対して,

$$\int_{-1}^{1}(px+q)f(x)\,dx=0$$

(ロ) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx=1$

〔津田塾大〕

(イ)より

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく

$$\int_{-1}^{1}(px+q)(ax^2+bx+c)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(apx^3+bpx^2+cpx+aqx^2+bqx+cq)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(aq+bp)x^2+cq\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}(aq+bp)x^3+cqx\right]_0^1=0 \text{ より}$$

$\frac{1}{3}(aq+bp)+cq=0 \rightarrow aq+bp+3cq=0$

$bp+(a+3c)q=0$

p、qは任意より　$b=0$　$a+3c=0$

$\therefore f(x)=-3cx^2+c$ とおける　…①

また(ロ)より

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(-3cx^2+c)^2\,dx=1$ であるから

$$\int_{-1}^{1}9c^2x^4-6c^2x^2+c^2\,dx=$$

$$=2\left[\frac{9}{5}c^2x^5-2c^2x^3+c^2x\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{5}c^2$$

$\frac{8}{5}c^2=1$　$c^2=\frac{5}{8}$　$c=\pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$　これを①に代入して整理すると

$$f(x)=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$$