

xy 平面上の放物線  $C: y = x^2$  と  $C_a: y = a(x-2)^2 - 1$  を考える。ただし,  $a$  は定数とする。次の問いに答えよ。

(1)  $C$  と  $C_a$  が共有点をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $C$  と  $C_a$  が共通の接線をただ 1 つだけもつような  $a$  の値を求めよ。また、そのときの共通な接線の方程式を求めよ。

(1)  $C = C_a$  とおいて実数解の有無を調べよ

[秋田大]

$$x^2 = a(x-2)^2 - 1$$

$$x^2 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$$

$$(a-1)x^2 - 4ax + 4a - 1 = 0 \quad \text{ただし } a=1 \text{ のときは}$$

$$-4a + 3 = 0 \quad \text{すなはち } x = \frac{3}{4} \text{ で実数解をもつて適する} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a \neq 1 \text{ とおいて判別式 } \frac{1}{4} \geq 0 \text{ とおなよ}$$

$$4a^2 - (a-1)(4a-1) \geq 0$$

$$4a^2 - (4a^2 - 5a + 1) \geq 0$$

$$5a \geq 1$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{5} \quad \text{これは \textcircled{1} も満たす}$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{5}$$

(2)  $y' = 2x$  で  $C$  上の接点を  $(t, t^2)$  とすと接線の方程式は

$$y = 2tx - t^2 \quad \text{これは}$$

$$\text{共通接線なので} \quad 2tx - t^2 = a(x-2)^2 - 1 \quad \text{は } t \text{ は二次方程式の} \quad \text{重解をもつ。}$$

$$at^2 - 4at + 4a - 1 = 2tx - t^2$$

$$at^2 - 2(t+2a)x + t^2 + 4a - 1 = 0$$

$$\text{判別式 } \frac{1}{4} = 0 \text{ とおなよ}$$

$$(t+2a)^2 - a(t^2 + 4a - 1) = 0$$

$$t^2 + 4at + 4a^2 - at^2 - 4a^2 + a = 0$$

$$(1-a)t^2 + 4at + a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(1) \quad a=1 \text{ のとき} \quad 4t+1=0 \quad t = -\frac{1}{4} \quad \text{求めた接線} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$$

(2)  $a \neq 1$  のときの判別式  $\frac{1}{4} = 0$  とおなよ

$$4a^2 - a(1-a) = 0$$

$$5a^2 - a = 0$$

$$a(5a-1) = 0$$

$$\text{このとき } a \neq 0 \text{ である。}$$

$$a = \frac{1}{5} \quad \text{このときの } t \text{ は } \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{1}{5}(2t+1)^2 = 0 \quad \text{すなはち } t = -\frac{1}{2}$$

→ これら求めた接線は

$$y = -x - \frac{1}{4}$$