ベクトル58

辺の長さが AB= $\sqrt{5}$, AC= $\sqrt{5}$, BC= $\sqrt{2}$ で与えられる △ABC について次の問いに答えよ。ただし, 解答の分数は既約分数とする。

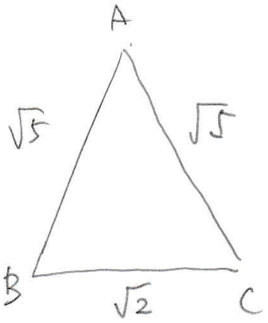
(1) $\cos\angle A$ の値は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(2) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値は $\boxed{}$ である。

(3) $|\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}|^2$ を最小にする t の値は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ で, 最小値は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である。

〔青山学院大〕

(1)



$\angle A=\theta$ とすると余弦定理より

$2=5+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cos\theta$

$10\cos\theta=8$

$\cos\theta=\frac{4}{5}$　　$\therefore\ \frac{4}{5}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}=4$　　$\therefore\ 4$

(3) $|\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-2t\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t^2|\overrightarrow{AC}|^2$ …① (1)(2)と題意より①は

$5-8t+5t^2$ となり平方完成すると

$5\left(t-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{5}+5=5\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$

よって

$t=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{9}{5}$ となる