OK

正弦余弦42

△ABCにおいて, AB=4, BC=6とする。辺BAの延長上にCA=CDとなるように点Dをとり, CA= x, AD= y とする。

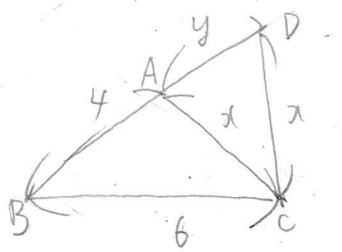
(1) △ACDにおいて, $\cos D$ を x, y の式で表せ。

(2) y を x の式で表せ。

(3) △ACDの3辺の和が最大となるとき, △ACDの外接円の半径 R を求めよ。

〔日本工大〕

(1)



△ACDで余弦定理を用いると

$x^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos D$ となり

$2xy\cos D = y^2$

$\therefore \cos D = \dfrac{y}{2x}$

(2)

△BCDで余弦定理を用いると

$6^2 = (y+4)^2 + x^2 - 2\cdot x(y+4)\cos D$

$36 = (y+4)^2 + x^2 - \cancel{2x}(y+4)\cdot\dfrac{y}{\cancel{2x}}$

$36 = \cancel{y^2} + 8y + 16 + x^2 - \cancel{y^2} - 4y$

$-4y = x^2 - 20$　　$\therefore y = -\dfrac{x^2}{4} + 5$

(3) 3辺の和は $2x + y$ となるが(2)より $y = -\dfrac{x^2}{4} + 5$ であるから

3辺の和は $-\dfrac{x^2}{4} + 2x + 5$ となる これを z とすると

$z = -\dfrac{1}{4}(x-4)^2 + 9$ となり $x=4$ のとき最大値9となる

$x=4$ のとき $y=1$ となり $\cos D = \dfrac{1}{8}$ であるから $\sin D = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{63}}{8}$

正弦定理より

$\dfrac{x}{\sin D} = 2R$ （$\therefore R$ は外接円の半径） $R = \dfrac{2}{\sin D} = \dfrac{16}{\sqrt{63}}$　　$\therefore R = \dfrac{16\sqrt{63}}{63}$